2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=-1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}=\frac{x-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}}$

$x^2+8>x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+8}>|x| \Rightarrow \sqrt{x^2+8}>x$

$\Rightarrow x-\sqrt{x^2+8}<0$ d'où $f'(x)<0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)	-	
f(x)	$+\infty$ ↘	0

3) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J=f(\mathbb{R})=]0,+\infty[$

4) a) $f(x)=x \Leftrightarrow -x+\sqrt{x^2+8}=x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+8}=2x$

* l'équation f(x)=x n'a pas de solutions dans $]-\infty,0[$

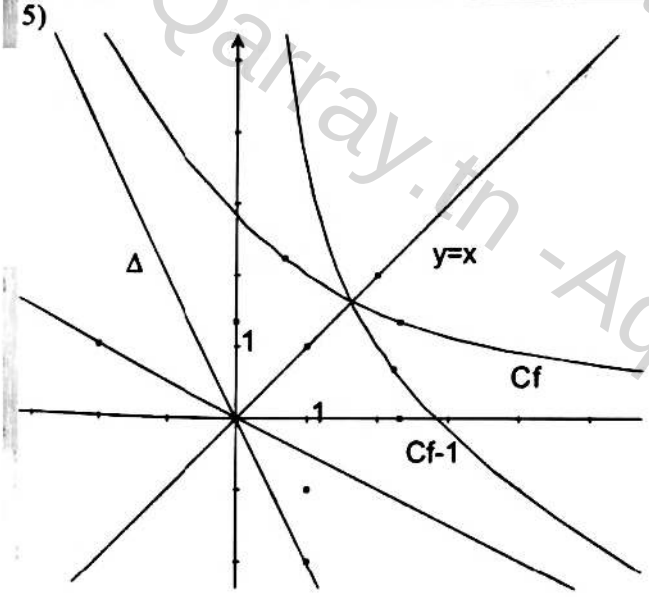
* dans $[0,+\infty[$

$f(x)=x \Leftrightarrow x^2+8=4x^2 \Leftrightarrow x^2=8/3 \Leftrightarrow x=\sqrt{8/3}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{2}{3}\sqrt{6}\right\}$

b) $(\zeta_f)\cap(\zeta_{f^{-1}})=\left\{A\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$

5)



B/

1) f est continue et strictement décroissante sur $[1,2]$ d'où $f([1,2])=[f(1),f(2)]=[2\sqrt{3}-2,2]$

$f([1,2])\subset[1,2]$ car $2\sqrt{3}-2>1$

2) $f'(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

$|f'(x)|=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

$1\le x\le 2 \Rightarrow 1\le x^2\le 4$

$\Rightarrow 9\le x^2+8\le 12 \Rightarrow 3\le\sqrt{x^2+8}\le 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+8}}\le\frac{1}{3}$

d'où $\frac{1}{2\sqrt{3}}\le\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\le\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\ge\frac{1}{3}\Rightarrow -\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\ge-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow 1-\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\le\frac{2}{3}$

d'où pour $x\in[1,2]$ $|f'(x)|\le\frac{2}{3}$

3) $\begin{cases}U_0=1\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

a) * pour n=0 $1\le U_0\le 2$ (vrai)

* supposons que $1\le U_n\le 2$

* montrons que $1\le U_{n+1}\le 2$

$1\le U_n\le 2\Rightarrow U_n\in[1,2]\Rightarrow f(U_n)\in f([1,2])$

$\Rightarrow U_{n+1}\in[1,2]$ car $f([1,2])\subset[1,2]$

conclusion : $1\le U_n\le 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) d'après 4) a)

$f(\sqrt{8/3})=\sqrt{8/3}$

f est dérivable sur $[1,2]$ et $|f'(x)|\le 2/3$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn